Supreum und Infimum von Mengenkombinationen

Es seien X, Y nichtleere, beschränkte Mengen reeller Zahlen und

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\},\ X \cdot Y := \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

a) Beweisen Sie:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y,\ \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

Gilt auch stets

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y,\ \inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y?$$

b) Zeigen Sie:

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X,\ \sup Y\},\ \inf(X \cup Y) = \min\{\inf X,\ \inf Y\}.$$

Ist $X \cap Y \neq \emptyset$, so ist

$$\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X,\ \sup Y\},\ \max\{\inf X,\ \inf Y\} \leq \inf(X \cap Y).$$

Kann hierbei das Kleiner-Zeichen auftreten?